TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

TOME IV.

THÉORIES DES SATELLITES DE JUPITER ET DE SATURNE.
PERTURBATIONS DES PETITES PLANÈTES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

CHAPITRE XII.

DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES COMÈTES LORSQU'ELLES APPROCHENT TRÈS PRÈS DES PLANÈTES.

83. Les formules du Chapitre précédent permettent de calculer numériquement les perturbations des éléments elliptiques ou paraboliques d'une comète par les planètes. Ce calcul présenterait de grandes difficultés si la comète venait à passer très près de l'une des planètes; on peut heureusement suivre, dans ce cas, un procédé très expéditif qui a été indiqué par d'Alembert dans ses *Opuscules mathématiques* (t. I, p. 305), et développé par Laplace dans ses recherches sur la comète de Lexell, et plus tard enfin par Le Verrier. Nous allons exposer ce procédé.

Soient

x, y, z les coordonnées rectangulaires héliocentriques de la comète;
x', y', z' les coordonnées de la planète, que nous supposerons être Jupiter;
ξ, η, ζ les coordonnées jovicentriques de la comète, rapportées à des axes parallèles aux axes fixes.

Soient encore

m_0 la masse du Soleil; m' celle de Jupiter; ρ la distance de la comète à la planète; r et r' les distances au Soleil.

On aura les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+fm_0\frac{x}{r^3}&=fm'\left(\frac{x'-x}{\rho^3}-\frac{x'}{r'^3}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2}+fm_0\frac{y}{r^3}&=fm'\left(\frac{y'-y}{\rho^3}-\frac{y'}{r'^3}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2}+fm_0\frac{z}{r^3}&=fm'\left(\frac{z'-z}{\rho^3}-\frac{z'}{r'^3}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{d^2x'}{dt^2}+f(m_0+m')\frac{x'}{r'^3}=0.$$

En faisant, dans la première des équations (1),

$$x = x' + \xi, \qquad y = y' + \eta, \qquad z = z' + \zeta,$$

et tenant compte de la formule (2), on trouve la première des équations suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + fm'\dfrac{\xi}{\rho^3} = fm_0\left(\dfrac{x'}{r'^3} - \dfrac{x}{r^3}\right), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + fm'\dfrac{\eta}{\rho^3} = fm_0\left(\dfrac{y'}{r'^3} - \dfrac{y}{r^3}\right), \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + fm'\dfrac{\zeta}{\rho^3} = fm_0\left(\dfrac{z'}{r'^3} - \dfrac{z}{r^3}\right). \end{cases}$$

Les équations (1) conviennent au mouvement héliocentrique de la comète; soient R la force provenant de l'attraction du Soleil; F la force perturbatrice; on aura

$$\mathrm{R} = \frac{fm_0}{r^2}, \qquad \mathrm{F} = fm'\sqrt{\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right)^2 + \left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right)^2 + \left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right)^2}.$$

Les équations (3) conviennent au mouvement jovicentrique produit par l'attraction R′ de Jupiter, et la force perturbatrice émanant du Soleil; on aura

$$\mathrm{R}' = \frac{fm'}{\rho^2}, \qquad \mathrm{F}' = fm_0\sqrt{\left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{y'}{r'^3} - \frac{y}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{z'}{r'^3} - \frac{z}{r^3}\right)^2}.$$

Si nous écrivons la condition

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{R}'},$$

nous aurons l'équation d'une surface pour tous les points de laquelle il y aura un égal avantage à considérer le mouvement héliocentrique troublé par l'attraction de Jupiter, ou le mouvement jovicentrique troublé par l'attraction du Soleil. Si l'on désigne simplement par m' le rapport $\frac{m'}{m_0}$, on trouve que la condition (4) devient

$$(5) \qquad m'^2 r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{r'^4} + 2\,\frac{x'\xi + y'\eta + z'\zeta}{\rho^3 r'^3}} = \rho^2\sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r'^4} - 2\,\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3 r'^3}}.$$

Soit posé

$$\frac{x'\xi + y'\eta + z'\zeta}{\rho r'} = \cos\theta, \qquad \frac{\rho}{r'} = u;$$

u sera une fraction petite, car c'est évidemment près de Jupiter seulement qu'il peut y avoir avantage à faire la transformation indiquée. On aura ensuite

$$xx' + yy' + zz' = x'(x'+\xi) + y'(y'+\eta) + z'(z'+\zeta) = r'^2(1 + u\cos\theta),$$
$$r^2 = (x'+\xi)^2 + (y'+\eta)^2 + (z'+\zeta)^2 = r'^2(1 + 2u\cos\theta + u^2).$$

En faisant ces substitutions dans l'équation (5), on trouve

$$m'^2 = u^4 \frac{(1+2u\cos\theta+u^2)^{-2}}{(1+2u^2\cos\theta+u^4)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1+(1+2u\cos\theta+u^2)^2 - 2(1+u\cos\theta)(1+2u\cos\theta+u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ou bien, en développant suivant les puissances de u,

$$m'^2 = u^4(1 - 4u\cos\theta + \ldots)\sqrt{u^2(1+3\cos^2\theta) + 4u^3\cos\theta + \ldots},$$
$$m'^2 = u^5\sqrt{1+3\cos^2\theta}\left(1 - 2u\cos\theta\,\frac{1+6\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta} + \ldots\right),$$

d'où

$$u = \left(\frac{m'^2}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right)^{\frac{1}{5}} + \frac{2}{5}\cos\theta\left(\frac{m'^2}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right)^{\frac{2}{5}}\frac{1+6\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta} + \ldots.$$

En remplaçant m' par $\frac{1}{1047}$ dans le cas de Jupiter, on a, dans tous les cas,

$$\left(\frac{m'^2}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right)^{\frac{1}{5}} < m'^{\frac{2}{5}} = 0,062,$$

et l'on peut se borner à

$$\rho = r'\left(\frac{m'^2}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right)^{\frac{1}{5}};$$

c'est l'équation approchée de la surface cherchée, en coordonnées polaires ρ et θ, l'axe polaire étant le prolongement de la droite SP qui joint le Soleil à la planète, et l'origine au centre de la planète. Cette surface est de révolution autour de la droite SP, et ne diffère pas beaucoup d'une sphère, puisque ρ varie entre les deux limites

$$m'^{\frac{2}{5}} r' \qquad \text{et} \qquad \frac{m'^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{5}}} r',$$

dont le rapport $= 1,15$; on peut donc admettre que la surface définie par la condition (4) est sensiblement une sphère de rayon $= m'^{\frac{2}{5}} r'$, ce que Laplace (¹) nomme la *sphère d'activité* de la planète; à l'extérieur de cette sphère, on a $\frac{F}{R} < \frac{F'}{R'}$; il y a avantage à partir du mouvement héliocentrique de la comète, et à déterminer

(¹) Laplace prend $r'\sqrt[5]{\frac{1}{2}m'^2}$ pour le rayon de la sphère d'activité.

les perturbations causées par la planète. A l'intérieur de la sphère, on a $\frac{F'}{R'} < \frac{F}{R}$; il est plus avantageux de considérer le mouvement jovicentrique et de calculer ensuite les perturbations provenant du Soleil. La sphère sépare, en quelque sorte, le domaine de la planète de celui du Soleil; sur sa surface même, on a, dans une évaluation approchée,

$$\frac{F}{R} = m' \frac{r^2}{\rho^2} \sqrt{1 + \frac{2\rho^2}{r'^2}\cos\theta + \frac{\rho^4}{r'^4}} = \frac{m' r'^2}{\rho^2} = m' \left(\frac{1 + 3\cos^2\theta}{m'^2} \right)^{\frac{2}{5}}.$$

Dans le cas de Jupiter, on trouve que le rapport $\frac{F}{R}$ varie sur la surface de la sphère, entre les limites $\sqrt[5]{m'} = 0,25$ et $\sqrt[5]{16m'} = 0,43$. Voici le Tableau des rayons des sphères d'activité pour les diverses planètes, exprimés en prenant pour unité la distance de la Terre au Soleil :

Mercure	0,001	Jupiter	0,322
Vénus	0,004	Saturne	0,363
La Terre	0,006	Uranus	0,339
Mars	0,004	Neptune	0,576

84. Cela posé, considérons une comète qui s'approche beaucoup de Jupiter; tant que sa distance est supérieure à $\frac{1}{3}$ environ, nous pouvons calculer les valeurs numériques des perturbations des éléments héliocentriques par les formules du Chapitre précédent. Puis on déterminera les coordonnées héliocentriques x, y, z et leurs dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, à l'instant où la distance ρ devient égale à peu près au tiers de la distance de la Terre au Soleil. On en conclura les valeurs numériques de

$$\xi_0 = x - x', \qquad \eta_0 = y - y', \qquad \zeta_0 = z - z',$$

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = \frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}, \qquad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = \frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}, \qquad \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = \frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}.$$

Avec ces valeurs des coordonnées jovicentriques et de leurs dérivées, on calculera (¹) les éléments de la section conique que la comète décrit dans son mouvement relatif, à l'intérieur de la sphère d'activité. Cette section conique pourra être une ellipse ou une parabole et même, le plus souvent, une hyperbole. Si l'on néglige les perturbations de ce mouvement à l'intérieur de la sphère, on calculera les valeurs de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$, à la sortie de la sphère d'activité.

Soient $\xi_1, \ldots, \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_1$ les valeurs obtenues, $x'_1, \ldots, \left(\frac{dz'}{dt}\right)_1$ les valeurs corres-

(¹) *Voir* notre Tome I, Chap. VI.